# הרצאה 3

## לוגיקה ותורת הקבוצות

# *קבוצות בנות מניה*

# *Countable Sets*

אוניברסיטת רייכמן

# תוכניתנו להיום

- חזרה קצרה על השוואת קבוצות
- תזכורת על הוכחה באינדוקציה
- הוכחה שעוצמת הטבעיים הינה העוצמה האינסופית הקטנה ביותר
- הגדרת קבוצה בת-מניה
- סגירות מחלקת הקבוצות בנות המניה תחת פעולות (איחוד, חיתוך...)

הפסקה אחרי כשעה ורבע

- המשך סגירות מחלקת הקבוצות בנות המניה
- עוצמת קבוצת המספרים הרציונליים

# תזכורת מההרצאה הקודמת

"COME BACK!"

# קבוצות שקולות $A\sim B$, $|A|=|B|$

הגדרה. נאמר שקבוצות A ו-B הינן *שוות עוצמה*, או *שקולות* (*equivalent*), ונסמן זאת ע"י $|A|=|B|$ או $A\sim B$, אם קיימת פונקצית שקילות (bijection) ביניהן.

כלומר, פונקציה מלאה, חד-חד ערכית ועל מ-A ל-B.

# שקילות קבוצות – דוגמאות

- $A=\{1,2,3,4,\ldots\}$; $B=\{2,4,6,8,\ldots\}$.
  - $|A| = |B|$
  - ישנה פונקצית שקילות $f:A\leftrightarrow B$ המוגדרת ע"י $f(x)=2x$.

- ה-"פרדוקס" של גלילאו גליליי (1638): הקבוצה של ריבועי המספרים הטבעיים $(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2,\ldots)$ מוכלת ממש בקבוצת כל הטבעיים $\mathbb{N}$ אך ישנה התאמה מלאה ביניהן.

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$

$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

# שקילות קבוצות

היחס של שקילות קבוצות (אותה העוצמה) הוא אכן יחס שקילות:

- רפלקסיבי. לכל קבוצה A, $A \sim A$:
  - ע"י פונקצית הזהות.
- סימטרי. לכל A ו-B, $A \sim B$ אמ"מ $B \sim A$:
  - ע"י הפונקציה ההופכית.
- טרנזיטיבי. לכל A, B ו-C, אם $A \sim B$ ו-$B \sim C$ אז $A \sim C$:
  - ע"י הרכבה של פונקציות.

דוגמא לשימוש בהיות היחס יחס שקילות: ראינו ש-$(0,1) \sim (1,\infty)$ ו-$[0,1) \sim (0,1)$.
לכן, לפי הטרנזיטיביות, נקבל ש- $[0,1) \sim (1,\infty)$.

# $|A| \leq |B|$

הגדרה. קבוצה A קטנה או שוות-עוצמה לקבוצה B, בסימון $|A| \leq |B|$, אם יש פונקציה מלאה ו-חח"ע מ-A ל-B.

משפט. לכל שתי קבוצות לא ריקות A ו-B, $|A| \leq |B|$ אמ"מ יש פונ' מ-B על A אמ"מ יש פונ' מלאה מ-B על A.

# $|A|\le|B|$ הינו יחס סדר מלא חלש

- אכן ניתן להשתמש ביחס השוואת העוצמות כמצופה מיחס סדר:

לכל קבוצות A, B ו-C:

- מלא. $|A|\le|B|$ או $|B|\le|A|$.
  - נובע מאקסיומת הבחירה. לא נוכיח זאת בקורס.
- רפלקסיבי. $|A|\le|A|$
  - ע"י פונקצית הזהות.
- אנטי-סימטרי. אם $|A|\le|B|$ ו-$|B|\le|A|$ אז $|A|=|B|$.
  - משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין. נוכיח אותו בהמשך הקורס.
- טרנזיטיבי. אם $|A|\le|B|$ ו-$|B|\le|C|$ אז $|A|\le|C|$.
  - הרכבה של פונקציות מלאות ו-חח"ע יוצרת פונ' מלאה ו-חח"ע.

# $|A| < |B|$

הגדרה. עבור קבוצות A ו-B, נגדיר ש-A קטנה ממש מ-B ונסמן $|A|<|B|$ אם $|A|\leq|B|$ ו-$|B|\not\leq|A|$.

כלומר, כאשר קיימת פונ' מלאה וחח"ע מ-A ל-B ולא קיימת פונק' מלאה ו-חח"ע מ-B ל-A.

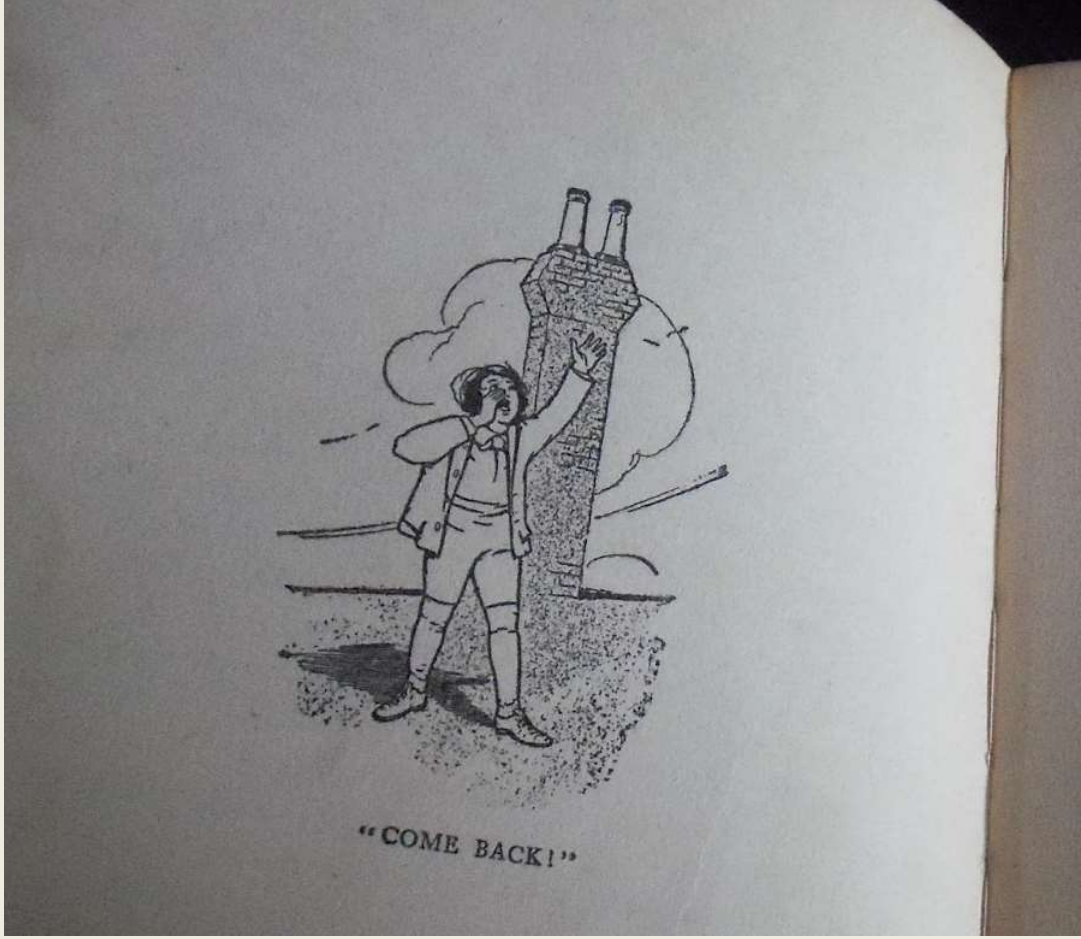
# קבוצות סופיות ואינסופיות

הגדרה. קבוצה הינה *אינסופית* אם היא שקולה לתת-קבוצה ממש שלה.

הגדרה. קבוצה הינה *סופית* אם היא לא אינסופית.

# קצת על קבוצות אינסופיות

- משפט 1. אם A אינסופית ו-$A \subseteq B$ אז B אינסופית.
- משפט 2. אם A אינסופית ו-$A \sim B$ אז B אינסופית.
  - מסקנה. אם A סופית ו-$A \sim B$ אז B סופית.




היום...

נדבר היום על

קבוצות בנות מניה

אך ראשית, נזכר מה זו אינדוקציה

# הוכחה באינדוקציה

# עקרון האינדוקציה

- יהי P(n) יחס חד-מקומי (תכונה) של מספרים טבעיים.

אם

בסיס האינדוקציה
Base case

- P(0) מתקיים, וכן

צעד האינדוקציה
Induction step

- לכל מספר טבעי n, P(n) גורר את P(n+1),
כלומר, אם P(0) אז P(1), ואם P(1) אז P(2), ...

אז P(n) מתקיים לכל מספר טבעי n.

# תבנית להוכחות באינדוקציה

- ישנם שלושה שלבים להוכחה:

1. הגדרה מדויקת של היחס החד-מקומי P(n), והכרזה שמוכיחים באינדוקציה על n ש-P(n) מתקיים לכל מס' טבעי n.

2. מקרה הבסיס: הוכחה ש-P(0) מתקיים.

3. שלב המעבר: מניחים ש-P(n) מתקיים ומראים ש- P(n+1) מתקיים.

# תבנית להוכחות באינדוקציה חזקה

במקום להניח שרק $P(n)$ מתקיים, ניתן להניח שלכל $m \leq n$, $P(m)$ מתקיים.

כלומר, תבנית ההוכחה הינה:

1. הגדרה מדויקת של היחס החד-מקומי $P(n)$, והכרזה שמוכיחים באינדוקציה על n ש-$P(n)$ מתקיים לכל מס' טבעי n.

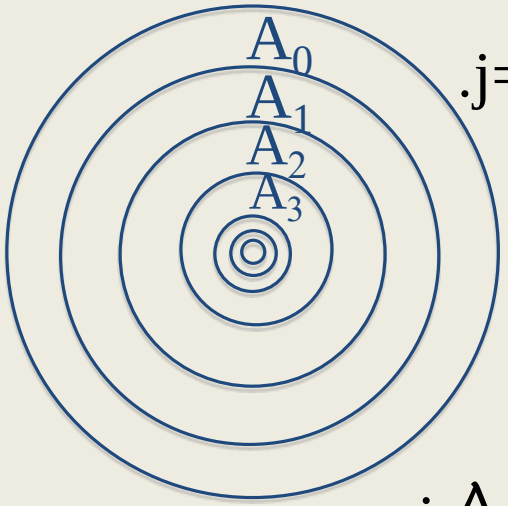
2. מקרה הבסיס: הוכחה ש-$P(0)$ מתקיים.

3. שלב המעבר: מניחים שלכל $m \leq n$, $P(m)$ מתקיים, ומראים ש-$P(n+1)$ מתקיים.

# דוגמא פשוטה להוכחה באינדוקציה

משפטון. תהא $A_0, A_1, A_2, \ldots$ סדרה אינסופית של קבוצות, כך שלכל מספר טבעי n מתקיים $A_{n+1} \subset A_n$. אזי לכל מספרים טבעיים $i<j$, מתקיים $A_j \subseteq A_{i+1}$.

הוכחה.




מכיוון ש-$i<j$, קיים מספר טבעי כלשהו $k\geq 1$, כך ש- $j=i+k$.
נראה באינדוקציה על k, שלכל $k\geq 1$, $A_{i+k} \subseteq A_{i+1}$.

- *מקרה הבסיס*, $k=1$: מכיוון ש- $A_{i+1} = A_{i+1}$,
  בפרט נקבל ש- $A_{i+1} \subseteq A_{i+1}$.
- *שלב המעבר*

הנחת האינדוקציה: $A_{i+k} \subseteq A_{i+1}$. נראה ש- $A_{i+k+1} \subseteq A_{i+1}$ :

- לפי הנתונים $A_{i+k+1} \subset A_{i+k}$, ובפרט $A_{i+k+1} \subseteq A_{i+k}$.
- מהנחת האינדוקציה $A_{i+k} \subseteq A_{i+1}$.
- על-כן מטרנזיטיביות יחס ההכלה, נקבל ש- $A_{i+k+1} \subseteq A_{i+1}$ . □

נחזור לקבוצות...

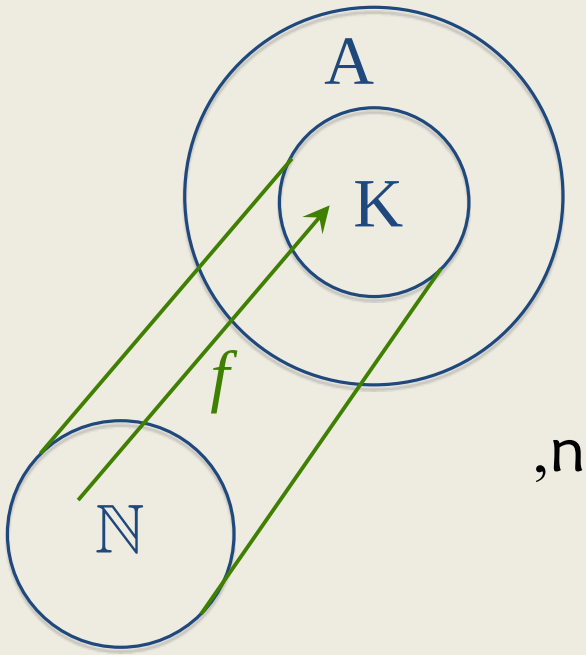
# $\mathbb{N}$ – האינסוף הקטן ביותר

- משפט. קבוצה A הינה אינסופית אמ"מ $|A| \geq |\mathbb{N}|$.
כלומר, אמ"מ יש פונקציה מלאה וחח"ע מ-$\mathbb{N}$ ל-A.

הוכחה.

$\Rightarrow$: (הצד הקל. אם $|A| \geq |\mathbb{N}|$ אז A אינסופית.)

- מכיוון ש-$|A| \geq |\mathbb{N}|$, קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}\to A$ מלאה וחח"ע.
- תהי הקבוצה $K=f(\mathbb{N})$ התמונה של f.
- אזי הפונקציה $f':\mathbb{N}\to K$, המוגדרת כך שלכל n, $f'(n)=f(n)$, הינה פונ' שקילות.
- מכאן ש-K שקולה ל-$\mathbb{N}$.
- לפי משפט 2 נקבל ש-K אינסופית.
- לפי משפט 1 נקבל ש-A אינסופית, שכן יש לה תת-קבוצה אינסופית.

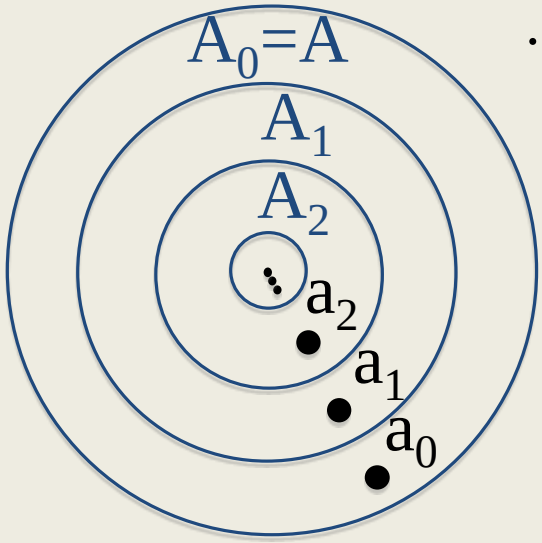


# $\mathbb{N}$ – האינסוף הקטן ביותר

$\Leftarrow$: (הצד הטריקי. אם A אינסופית אז $|A| \geq |\mathbb{N}|$)

אינטואיטיבית:

- תהי A קבוצה אינסופית. נגדיר $A_0 := A$.
- מכיוון ש-$A_0$ אינסופית, יש לה תת-קבוצה ממש $A_1 \subset A_0$, כך ש-$A_1 \sim A_0$.
  - יהי $a_0$ איבר ב-$A_0 \setminus A_1$.
- מכיוון ש-$A_1 \sim A_0$ ו-$A_0$ אינסופית, נובע ממשפט 2 ש-$A_1$ אינסופית. על-כן, יש ל-$A_1$ תת-קבוצה ממש $A_2 \subset A_1$, כך ש-$A_2 \sim A_1$ .
  - יהי $a_1$ איבר ב-$A_1 \setminus A_2$.
- וכך הלאה...



# $\mathbb{N}$ – האינסוף הקטן ביותר

$\Leftarrow$: (הצד הטריקי. אם A אינסופית אז $|A| \geq |\mathbb{N}|$)

פורמלית:

1. נגדיר $A_0 := A$, ונוכיח באינדוקציה על n, שלכל מספר טבעי n קיימות קבוצות אינסופיות $A_{n+1} \subset A_n$.

- מקרה הבסיס. מכיוון ש-$A_0$ אינסופית, יש לה תת-קבוצה ממש $A_1 \subset A_0$ כך ש-$A_1 \sim A_0$, ומכאן לפי משפט 2, $A_1$ אינסופית.

- שלב המעבר.

הנחת האינדוקציה: קיימות קבוצות אינסופיות $A_{n+1} \subset A_n$.

נוכיח שקיימות קבוצות אינסופיות $A_{n+2} \subset A_{n+1}$: לפי הנחת האינדוקציה $A_{n+1}$ אינסופית, על-כן יש לה תת-קבוצה ממש $A_{n+2} \subset A_{n+1}$, כך ש-$A_{n+2} \sim A_{n+1}$, ומכאן לפי משפט 2, $A_{n+2}$ אינסופית.

# $\mathbb{N}$ – האינסוף הקטן ביותר

המשך ההוכחה הפורמלית של הכיוון $\Leftarrow$ (אם A אינסופית אז $|A| \geq |\mathbb{N}|$):

2. תהא $f:\mathbb{N}\to A$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(n)=a_n$, כך ש-$a_n \in A_n \setminus A_{n+1}$.
נראה ש-f מלאה וחח"ע:

- f מלאה: הפונקציה f הוגדרה עבור כל מספר טבעי n.
- f חח"ע: יש להראות שלכל $i\neq j$, מתקיים ש: $f(i)=a_i\neq a_j=f(j)$.
  - בלי הגבלת הכלליות, נניח ש-$i<j$.
  - בהתאם לבניית הפונקציה f, ידוע ש: $a_i \notin A_{i+1}$ וש: $a_j \in A_j$.
  - לפי מה שהראנו (ב-1) וה-"משפטון" משקף 18, נקבל ש- $A_j \subseteq A_{i+1}$.
  - על-כן, $a_i \notin A_j$.
  - מכיוון ש-$a_j \in A_j$ ו-$a_i \notin A_j$ , קיבלנו ש-$a_i \neq a_j$, כנדרש. $\square$

# קבוצות בנות מניה ו-$\aleph_0$

- הגדרה. העוצמה של $\mathbb{N}$ הינה $\aleph_0$. כלומר, מגדירים ש- $|\mathbb{N}| := \aleph_0$.
- הגדרה. קבוצה A הינה *בת-מניה* (*countable*) אם היא סופית או שקולה ל-$\mathbb{N}$. כלומר, אם $|A| \le \aleph_0$.
- הגדרה. קבוצה A *איננה בת-מניה* (*uncountable*) אם היא אינסופית ולא שקולה ל-$\mathbb{N}$.
- סימון. ניתן לסמן קבוצה בת-מניה A כ- $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.
  (מכיוון שיש פונקציה מ-$\mathbb{N}$ על A.)
- דוגמאות:
  - $\varnothing$ בת-מניה. $|\varnothing|=0$
  - $\{3,4\}$ בת-מניה. $|\{3,4\}|=2$
  - $\mathbb{Z}$ בת-מניה. $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$
  - האם $\mathbb{Q}$ בת-מניה? האם $\mathbb{R}$ בת-מניה? נראה בהמשך.

# אינדוקציה בקבוצות בנות מניה

- ניתן להשתמש בעקרון האינדוקציה בתוך כל קבוצה בת-מניה.
  - יש סידור של כל איברי הקבוצה.
  - בהוכחה באינדוקציה, עלינו להראות ש:
    - מקרה הבסיס: התכונה P מתקיימת לאיבר בקבוצה שמסודר במיקום ה-0.
    - שלב המעבר: אם התכונה P מתקיימת לאיבר שבמיקום ה-n אז היא מתקיימת גם עבור האיבר במיקום ה-n+1.
  - בפועל, האינדוקציה מתבצעת בד"כ ישירות על איברי הקבוצה, מבלי שממספרים אותם. הרעיון הינו שייתכנו מספר מקרי בסיס ומספר אפשרויות להתקדם בשלב המעבר, ובלבד שמובטח שנגיע לכל איברי הקבוצה.
- אינדוקציה לא ניתן להפעיל בתוך קבוצות שאינן בנות מניה – לא נוכל להגיע בצורה אינדוקטיבית לכל איברי הקבוצה.

# סגירות
# מחלקת הקבוצות בנות-המניה
# תחת פעולות

# Closure of
# the Class of Countable Sets
# under Operations

# סגירות Closure

- תהי $S$ מחלקה כלשהי.
- תהי $op$ פעולה כלשהי על איברי $S$.
- נאמר ש-$S$ סגורה תחת הפעולה $op$ (או לפעולה $op$) אם הפעלת $op$ על איברי $S$ תמיד מוגדרת ותוצאתה הינה איבר ב-$S$.
- דוגמאות:
  - $\mathbb{N}$ סגורה תחת הפעולות + ו- $\cdot$.
  - $\mathbb{N}$ לא סגורה תחת הפעולות - ו- / .
  - $\mathbb{R}$ סגורה תחת הפעולות +, - ו- $\cdot$.
  - $\mathbb{R}$ לא סגורה תחת הפעולות / ושורש ריבועי.

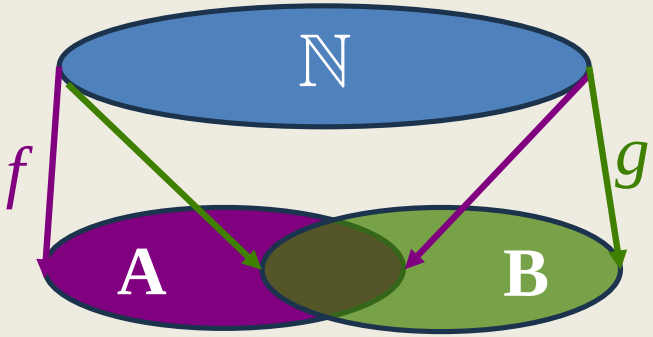
# איחוד Union

**משפט.** אם A ו-B הינן קבוצות בנות-מניה אז כך גם $A\cup B$.

הוכחה.

- מכיוון ש-A ו-B בנות מניה, ישנן פונקציות $f:\mathbb{N}\to A$ ו-$g:\mathbb{N}\to B$ מ-$\mathbb{N}$ על A ו-B, בהתאמה.
- נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to A\cup B$ מ-$\mathbb{N}$ ל-$A\cup B$:

$$h(n) = \begin{cases} f(n/2) & n \text{ is even} \\ g((n-1)/2) & n \text{ is odd} \end{cases}$$




- נוכיח ש-h הינה על $A\cup B$: (נא להשלים לבד...).
- מכאן ש-$|A\cup B|\le|\mathbb{N}|$, ולכן $A\cup B$ קבוצה בת-מניה. □

# איחוד סופי

משפט. איחוד סופי של קבוצות בנות-מניה יוצר קבוצה בת מניה.
(לכל מס' טבעי k וקבוצות בנות מניה $A_0, \ldots, A_{k-1}$, הקבוצה $\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$ בת-מניה.)

הוכחה.

- יהי k מס' טבעי ו- $A_0, \ldots, A_{k-1}$ קבוצות בנות מניה.
- אזי ישנן פונקציות-על $f_0:\mathbb{N}\to A_0$ , $f_1:\mathbb{N}\to A_1$ , …, $f_{k-1}:\mathbb{N}\to A_{k-1}$.
- נגדיר פונקציה h מ-$\mathbb{N}$ ל-$\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$ ע"י:

$$h(n) = \begin{cases} f_0(n/k) & (n \bmod k) = 0 \\ \vdots & \\ f_i(n-i/k) & (n \bmod k) = i \\ \vdots & \\ f_{k-1}(n-(k-1)/k) & (n \bmod k) = k-1 \end{cases}$$

- נראה ש-h הינה פונקציה על (נא להשלים לבד), ומכאן ש-$\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$ בת-מניה. □

# איחוד סופי – הוכחה חלופית

- משפט. איחוד סופי של קבוצות בנות-מניה יוצר קבוצה בת מניה.

הוכחה (אחרת).

נוכיח את טענת המשפט באינדוקציה על k.

- מקרה הבסיס: $A_0$ הינה קבוצה בת-מניה מהנתונים.
- שלב המעבר:
  - הנחת האינדוקציה: הקבוצה $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}$ בת-מניה.
  - נראה שהקבוצה $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k$ בת-מניה:
    - נגדיר $B = A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1}$.
    - נשים לב ש- $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k = B \cup A_k$.
  - קיבלנו ש- $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k$ הינה איחוד של שתי קבוצות בנות-מניה, ולכן בהתאם למשפט הקודם הינה בת-מניה. □

# איחוד בן-מניה של קבוצות בנות-מניה

יהיו $A_0, A_1, A_2, \ldots$ קבוצות בנות מניה. נגדיר $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

משפט. הקבוצה הנוצרת מאיחוד בן-מניה של קבוצות בנות מניה הינה בת-מניה.

*הערה: לא ניתן להוכיח זאת בעזרת האינדוקציה שבשקף הקודם!*

הוכחה אינטואיטיבית.

- יהיו $A_0, A_1, A_2, \ldots$ קבוצות בנות מניה.
- ניתן לסדר את איברי הקבוצות בטבלה:

Sets

$$
\begin{array}{lllllll}
A_0: & a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & a_{0,4} & \ldots \\
A_1: & a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \ldots \\
A_2: & a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \ldots \\
A_3: & a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \ldots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

- ניתן למנות את כל איברי הטבלה בשיטת ה-"זיגזג".

# איחוד בן-מניה של קבוצות בנות-מניה

משפט. הקבוצה הנוצרת מאיחוד בן-מניה של קבוצות בנות מניה הינה בת-מניה.

הוכחה פורמלית.

- יהיו $A_0, A_1, A_2, \ldots$ קבוצות בנות מניה, ונגדיר $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ .
- לכל מס' טבעי $i$, ניתן למנות את איברי $A_i$, כלומר $A_i=\{a_{i,j} \mid j\in\mathbb{N}\}$.
- מכאן ש- $A= \{a_{i,j} \mid i,j\in\mathbb{N}\}$.
- נגדיר פונ' שקילות $g:\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in\mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$, ע"י $g(\langle i,j\rangle)=(i+j)(i+j+1)/2 + i$.
  (תרגיל רשות לבית: להוכיח ש-$g$ פונ' שקילות.)
- הפונקציה ההופכית של $g$, כלומר $g^{-1}:\mathbb{N} \to \{\langle i,j\rangle \mid i,j\in\mathbb{N}\}$, הינה פונ' שקילות.
- נגדיר פונקציה $h$ מ-$\mathbb{N}$ על $A$, ע"י: $h(n)=a_{g^{-1}(n)}$.

(הפונקציה $h$ איננה בהכרח חח"ע, שכן יתכן שיהיו איברים $a_{i,j}= a_{i',j'}$.)

- מכאן ש-$A$ בת-מניה. □

# מכפלה Product

משפט. הקבוצה הנוצרת ממכפלה קרטזית של קבוצות בנות-מניה הינה בת-מניה.

הוכחה.

- תהינה A ו-B קבוצות בנות מניה, ו- $C:=A\times B$ המכפלה הקרטזית שלהן.
- ישנה מניה של A ומניה של B, כלומר $A=\{a_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ ו- $B=\{b_j \mid j\in\mathbb{N}\}$.
- על-כן, $C=\{\langle a_i,b_j\rangle \mid i,j\in\mathbb{N}\}$.

| C | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a_0,b_0$ | $a_0,b_1$ | $a_0,b_2$ | … |
| | $a_1,b_0$ | $a_1,b_1$ | $a_1,b_2$ | … |
| | $a_2,b_0$ | $a_2,b_1$ | $a_2,b_2$ | … |
| | ⋮ | | | |

- ההמשך כמו בהוכחה של איחוד בן-מניה של קבוצות בת מניה:
  - פונקצית שקילות $g:\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in\mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$
  - …
  - פונקציה h מ-$\mathbb{N}$ על C, תוך שימוש ב- $g^{-1}$ .
  - …
  - מכאן, C בת-מניה.

□

# מכפלה סופית

**משפט.** מכפלה סופית של קבוצות בנות-מניה יוצרת קבוצה בת מניה.
(לכל מס' טבעי $k$ וקבוצות בנות מניה $A_0, \ldots, A_{k-1}$, הקבוצה $A_0\times\ldots\times A_{k-1}$ בת-מניה.)

הוכחה.

נוכיח את טענת המשפט באינדוקציה על $k$.

- מקרה הבסיס: $A_0$ הינה קבוצה בת-מניה מהנתונים.
- שלב המעבר:
  - הנחת האינדוקציה: הקבוצה $A_0\times\ldots\times A_{k-1}$ בת-מניה.
  - נראה שהקבוצה $A_0\times\ldots\times A_{k-1}\times A_k$ בת-מניה:
    - נגדיר $B = A_0\times\ldots\times A_{k-1}$.
  - נשים לב ש- $A_0\times\ldots\times A_{k-1}\times A_k = (A_0\times\ldots\times A_{k-1})\times A_k = B\times A_k$.
  - קיבלנו ש- $(A_0\times\ldots\times A_{k-1})\times A_k$ הינה מכפלה של שתי קבוצות בנות-מניה, ולכן בהתאם למשפט הקודם הינה בת-מניה. □

# המספרים הרציונליים

משפט. קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ הינה בת-מניה.

הוכחה.

- קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ הינה איחוד בן-מניה של הקבוצות בנות המניה $A_0, A_1, \ldots,$ כאשר לכל מס' טבעי $i$, $A_i = \{ i/z \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$.
- על כן, בהתאם למשפט קודם, $\mathbb{Q}$ הינה בת-מניה. $\square$

הוכחה אחרת.

- בהתאם למשפט קודם, הקבוצה $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הינה בת-מניה.
- נגדיר פונקציה $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ע"י $f(x,y) = x/y$ if $y \neq 0$.
- הפונקציה $f$ הינה פונקציה (חלקית) על $\mathbb{Q}$.
- בהתאם, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$, ומכן ש-$\mathbb{Q}$ בת-מניה. $\square$

# אז מה היה לנו פה

- $\mathbb{N}$ הינה הקבוצה האינסופית הקטנה ביותר.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- קבוצה A הינה בת-מניה אם $|A| \leq \aleph_0$.
- ניתן לבצע אינדוקציה בתוך קבוצות בנות מניה.

- מחלקת הקבוצות בנות המניה סגורה תחת:
  - איחוד סופי
  - איחוד בן מניה.
  - מכפלה סופית.

- קבוצת המספרים הרציונליים הינה בת-מניה.